Commande optimale de l'irrigation : Double modélisation mathématique et agronomique vers une application au modèle Optirrig

Ruben Chenevat

Soutenance de thèse présentée publiquement le Vendredi 10 Octobre 2025

Devant le Jury composé de :

Emmanuel Trélat, Sorbonne Université	Rapporteur
Hasnaa Zidani, INSA Rouen	Rapportrice
Jean-Baptiste Caillau, U. Côte d'Azur	Examinateur
Nathalie Khalil, FEUP Porto	Examinatrice
Hind Oubanas, INRAE Montpellier	Examinatrice
Alain Rapaport, INRAE Montpellier	Directeur
Bruno Cheviron, INRAE Montpellier	Co-Directeur
Sébastien Roux, INRAE Montpellier	Co-Encadrant

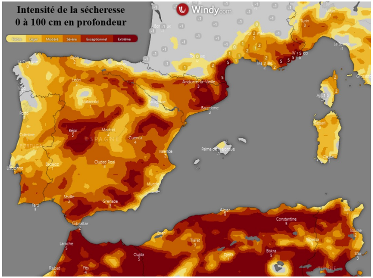
Introduction

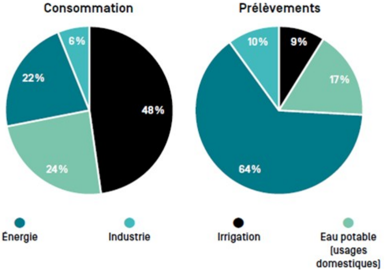
I - Contexte

II - Présentation d'un modèle de contrôle (CCI)

III - Formulation des problèmes d'optimisation

I - Contexte


Intensité de la sécheresse
0 à 100 cm en profondeur
Windy.com


Consommation
6%
22%
48%
24%
Prélèvements
10%
9%
17%
64%
Énergie
Industrie
Irrigation
Eau potable (usages domestiques)

Problématique et outils

Objectif : Stratégies d'irrigation performantes, horizon tactique

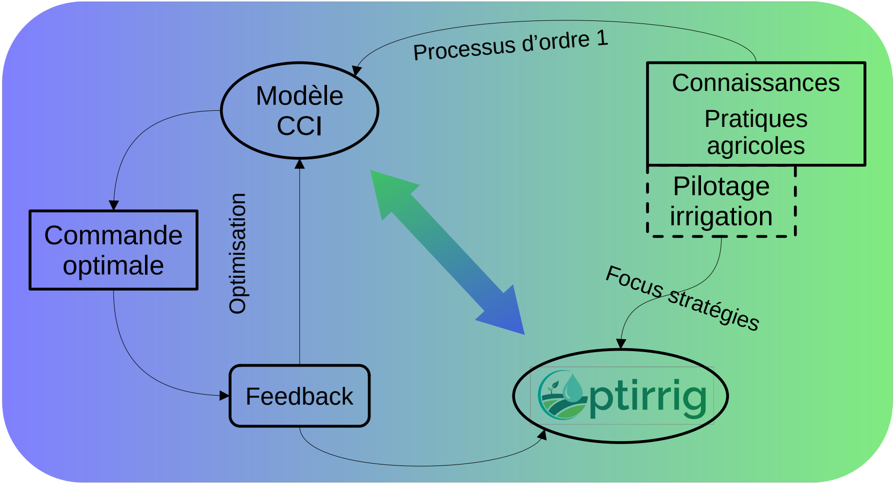
$$\underset{u}{max}\ \text{Biomasse}, \quad \underset{u}{min}\ \text{Eau utilisée}, \quad \underset{u}{max}\ \text{Revenus}$$

⇒ Leviers d'action : agronomique, technique, **pilotage**

⇒ Pilotage : utilisation de la commande optimale

grâce à la théorie et pour la pratique

Double modélisation CCI-Optirrig



Hypothèses générales

Échelle spatiale :

- Une parcelle
- Grandeurs homogènes

Échelle temporelle :

- Saison culturale
- Une récolte finale

Type de culture :

- Annuelle

Entrée-sortie :

- Variables accessibles
- Système localement contrôlable

Contrainte :

- Irrigation déficitaire

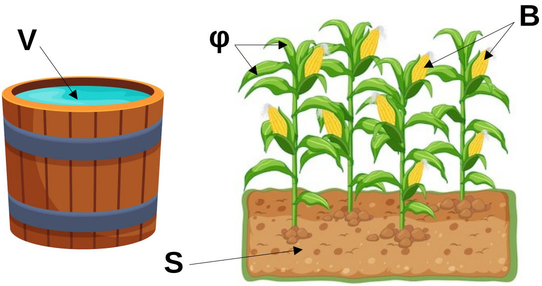
Introduction

II - Présentation du modèle Controlled Crop Irrigation

Modèle inspiré de : Pelak et al (2017), Bertrand et al (2018), Kalboussi et al (2019) & Boumaza et al (2021).

<u>Variables d'intérêt :</u>

- Humidité du sol ($\boldsymbol{S}$)
- Biomasse produite ($\boldsymbol{B}$)
- Eau d'irrigation disponible ($\boldsymbol{V}$)
- Recouvrement végétal (φ)



→ Une saison correspond à la **phase de croissance** végétale

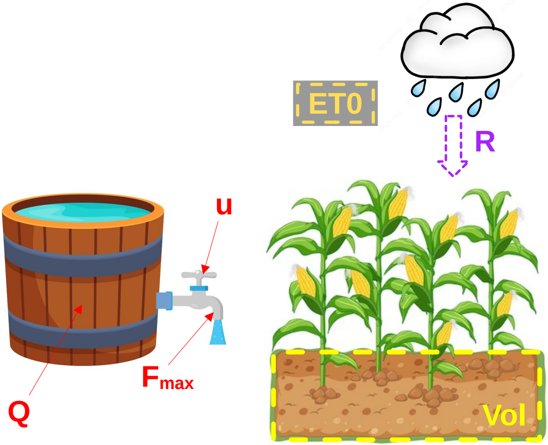
→ Les nutriments sont considérés comme une ressource **non limitante**

Éléments environnement :

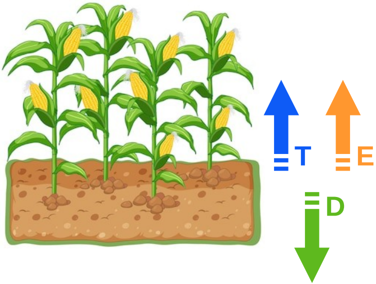
- Demande climatique (ET0)
- Réservoir du sol accessible (Vol)
- Pluies (R)

Éléments opératoires :

- Quota d'irrigation (Q)
- Débit maximal (F_{max})
- Pilotage/contrôle (u)

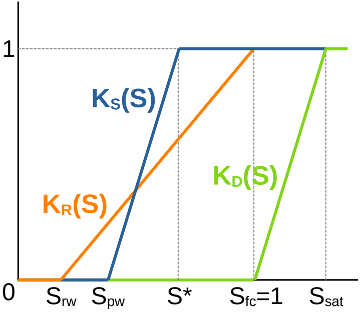


→ On considère que la capacité matérielle (F_{max}) est **plus grande** que le forçage climatique ($ET0$)



Transferts d'eau :

- Pertes dues à la transpiration $(-\varphi(t) K_S(S) \cdot ET0)$
- Pertes dues à l'évaporation $(-(1-\varphi(t)) K_R(S) \cdot ET0)$
- Pertes dues au drainage $(-k_{sat} K_D(S))$
- Apports via irrigation $(+F_{max} u)$
- Contribution des pluies $(+\alpha R(t))$



Dynamique du modèle CCI

→ Saison culturale pour $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T}]$, contrôle $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$:

Humidité du sol :

$$\dot{S}(t) = \frac{ET0}{Vol}\Bigg(-\varphi(t)K_S(S(t)) - (1-\varphi(t))K_R(S(t)) - \frac{k_{sat}}{ET0}K_D(S(t)) + \frac{F_{max}}{ET0}u(t) + \frac{\alpha}{ET0}R(t) \Bigg)$$

Production de biomasse :

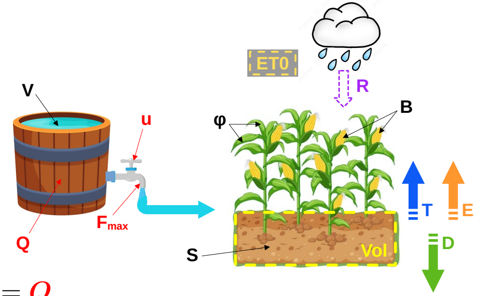
$$\dot{B}(t) = k_3\, \varphi(t)K_S(S(t))$$

Eau d'irrigation disponible :

$$\dot{V}(t) = -F_{max}u(t)$$

→ Conditions initiales :

$$S(0) = S_0 \in (S^*, 1], B(0) = 0, V(0) = Q$$



Introduction

I - Contexte

II - Présentation d'un modèle de contrôle (CCI)

III - Formulation des problèmes d'optimisation

III - Formulation des problèmes d'optimisation

Problèmes d'intérêt :

1. Sous condition de quota → maximiser la biomasse produite
2. Avec un cible de biomasse → minimiser l'utilisation d'eau
3. Sans condition terminale → maximiser la balance financière

Formulation dans le cadre CCI *(critère et cible n°1)* :

a. Contrainte d'état : $\boldsymbol{\forall t \in [0, T],\ S_{ope} \leq S(t)}$ avec $S_{pw} < S_{ope} < S^*$

b. Faisabilité et irrigation déficitaire : $\boldsymbol{Q_{ope} < Q < Q^*}$

c. Condition terminale : $\boldsymbol{V(T) \geq 0}$

Définition

$$(\mathcal{OCP}) : \quad \sup_{u(\cdot)} B(T)$$

Caractéristiques et difficultés

Modèle CCI :

- Processus biophysiques d'**ordre 1**
- Petite dimension

Problème de contrôle optimal :

- Horizon fixé, coût terminal, cible terminale (budget)
- Dynamique non autonome, non linéaire, **non lisse**
- Contient un terme **non déterministe**
- Dynamique affine par rapport au contrôle
- **Contrainte d'état** (inégalité)

Productions

I - Contributions théoriques en commande optimale

II - Analyse d'un cadre formel : cultures sous serre

III - Cadre opérationnel : Optirrig, cultures au champ

I - Contributions théoriques en commande optimale

Principe Bang-Bang bien connu pour les systèmes dynamiques linéaires :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t), \quad u(t) \in U \ \textbf{convexe compact} \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1}$$

Théorème (Hermes & La Salle, 1969)

$\forall t \geq t_0,\ \mathcal{A}_{BB}(t) = \mathcal{A}(t)$

Corollaire

Soit un problème de temps minimum à atteindre une cible Γ ***compacte*** *régi par (1). Si X_0 est dans l'ensemble d'atteignabilité de Γ, alors* ***il existe*** *un contrôle $u(\cdot)$ qui prend ses valeurs dans $\boldsymbol{E(U)}$, pour lequel la trajectoire associée atteint Γ en* ***temps minimal****.*

Question : A-t-on de tels résultats de structure pour le modèle CCI ?

I - Extensions des résultats de structure

Système dynamique du modèle CCI :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \boldsymbol{F(t, X(t))} + B(t)u(t) + \boldsymbol{c(t,\omega)} \\ (t_0, X_0) \in \Sigma \end{cases}$$

a) Partie affine par morceaux :

Partition de l'espace :

$$\Sigma = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \overline{P_i}$$

Pour $(t, X) \in P_i$, on a $\boldsymbol{F(t,X) = a_i(t) + A_i(t)X(t)}$ et F **continue** par rapport à X.

b) Partie non déterministe :

Bruit non contrôlé :

$$\boldsymbol{c(t,\omega)}$$

Étudié : $dX(t) = [a(t) + A(t)X(t) + B(t)u(t)]dt + \boldsymbol{[c(t) + C(t)X(t)]dW(t)}$

Extension au cadre affine par morceaux et continu

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) + B(t)u(t), \quad u(t) \in U \textbf{ convexe compact} \\ (t_0, X_0) \in \Sigma \end{cases} \tag{2}$$

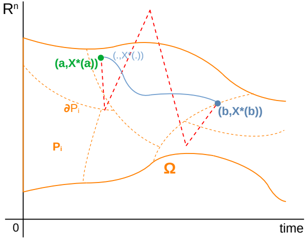
Théorème (Chenevat et al, 2024)

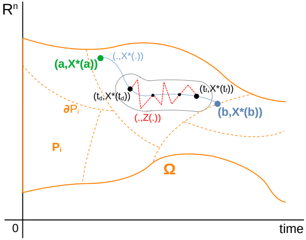
*Soit un problème de temps minimum à atteindre une cible Γ compacte régi par (2). Si X_0 est dans l'ensemble d'atteignabilité de Γ, alors **il existe** un contrôle optimal $u(\cdot)$ composé*

- *d'une succession d'arcs **bang-bang** quand la trajectoire associée est dans une région $\mathring{P}_i$*
- *d'arcs **singuliers** (ou contraints) éventuels le long de frontières ∂P_i.*

Remarque

Dans ce cas, les arcs **singuliers** se situent aux endroits où la dynamique est **non différentiable**.





Productions

I - Contributions théoriques en commande optimale

II - Analyse d'un cadre formel : cultures sous serre

III - Cadre opérationnel : Optirrig, cultures au champ

II - Analyse d'un cadre formel : cultures sous serre

Objectif : Établir des résultats “brique de base”

Hypothèses contextuelles :

- Système **totalement contrôlé**
- Conditions climatiques **stables**
- Pas de pluie
- Pas de drainage
- Débit d'irrigation **ajustable**

Dynamique de l'humidité du sol :

$$\dot{S}(t) = \frac{ET0}{Vol}\Big(-\varphi(t)K_S(S(t)) - (1-\varphi(t))K_R(S(t)) + \frac{F_{max}}{ET0}u(t)\Big)$$

Résolution du problème d'optimisation

Propriétés des solutions optimales :

Proposition

*Soit $\overline{u}(\cdot)$ une **solution optimale** au problème $(\mathcal{OCP})$. On note $(\overline{S}, \overline{B}, \overline{V})$ ses trajectoires associées. Alors :*

- $\boldsymbol{\overline{u}(t) = 0}$, *p.p.* $t \in [0, t^*]$
- $\boldsymbol{\overline{S}(t) \leq S^*}$, *pour tout* $t \in [t^*, T]$
- $\boldsymbol{\overline{V}(T) = 0}$.

Application du Principe du Maximum de Pontryagin non lisse (Clarke, 2013) :

Proposition

On note $(\lambda_S, \lambda_B, \lambda_V)$ les états adjoints.

- *Une solution optimale à $(\mathcal{OCP})$ n'est **pas anormale**.*
- $\forall t \in [0, T]$, $\lambda_S(t) \geq 0$; $\lambda_B \neq 0$; $\lambda_V \neq 0$

Propriété structurelle :

Proposition

Il existe une solution optimale dont les arcs ***singuliers*** *se situent aux points* ***non différentiable*** *de la dynamique, c'est-à-dire en* $\boldsymbol{\widetilde{S} = S_{ope}}$ *ou* $\boldsymbol{\widetilde{S} = S^*}$.

Remarque

Le contrôle associé à une humidité constante $\widetilde{S}$ est

$$u_{sing}(t, \widetilde{S}) = \Big(\varphi(t)K_S(\widetilde{S}) + (1 - \varphi(t))K_R(\widetilde{S})\Big)\frac{ET0}{F_{max}} \quad \in [0, 1]$$

Nombre de commutations :

Proposition

On définit la fonction de commutation par

$$\Psi(t) = \lambda_S(t)\frac{F_{max}}{Vol} - \lambda_V$$

L'ensemble $\mathcal{C} = \{t \in [0, T],\ \Psi(t) \geq 0\}$ *est* ***connexe***.

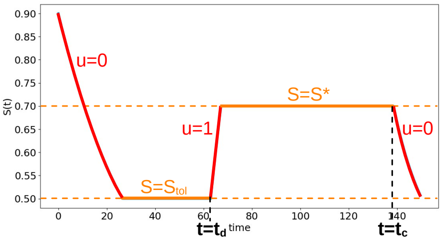
Synthèse des stratégies optimales

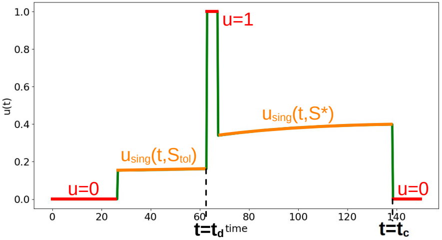
Proposition (Chenevat et al, 2025)

Il existe $\boldsymbol{t_d}$ *un "temps de décision",* $\boldsymbol{t_c}$ *un "temps de coupure", tels que le contrôle sous forme de feedback dépendant du temps*

$$U_{\boldsymbol{t_d},\boldsymbol{t_c}}(t,S,V)=\begin{cases}0, & (\boldsymbol{S}\geq S_{ope}\wedge t\leq \boldsymbol{t_d})\vee \boldsymbol{V}=0\vee t\geq \boldsymbol{t_c},\\ u_{sing}(t,S_{ope}), & \boldsymbol{S}=S_{ope}\ \text{et}\ t\leq \boldsymbol{t_d},\\ u_{sing}(t,S^*), & \boldsymbol{S}=S^*\ \text{et}\ (\boldsymbol{V}>0\wedge t<\boldsymbol{t_c}),\\ 1, & \text{sinon},\end{cases}$$

est optimal.





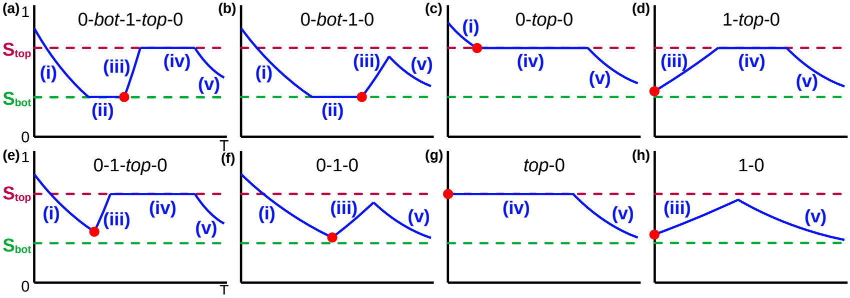
Intérêts et analyse complémentaire

Classe de scénarios d'irrigation :

→ Stratégies d'Irrigation Basées sur des Seuils (**TBIS**)

→ Résolution de $(\mathcal{OCP})$: optimisation en **petite dimension**

Question : Quelle est la valeur optimale de t_d ? Et comment l'expliquer ?

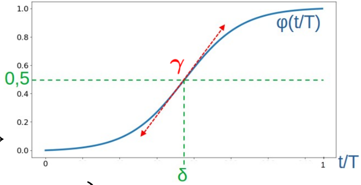


Exploration numérique et analyse de sensibilité

Plan d'exploration :

$k_2 = \frac{F_{max}}{ET0}$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = \text{temps caractéristique de mi-croissance} \\ \gamma = \text{pente caractéristique de croissance}\end{array}\right\} \rightarrow$$



$$\left.\begin{array}{l}S_{ope}^{(low)} = 0.37,\ S_{ope}^{(high)} = 0.45 \\ Q^{(low)} = 0.55Q^*,\ Q^{(med)} = 0.70Q^*,\ Q^{(high)} = 0.85Q^*\end{array}\right\} \rightarrow \text{contextes}$$

Notation	**Unité**	**Plage explorée**
S_0	mm/mm	$[0.88, 1]$
ET_0	mm/j	$[2, 7]$
Vol	mm	$[70, 270]$
k_2	-	$[2, 6]$
S^*	mm/mm	$[0.58, 0.87]$
δ	j/j	$[0.2, 0.8]$
γ	-	$[2, 7]$

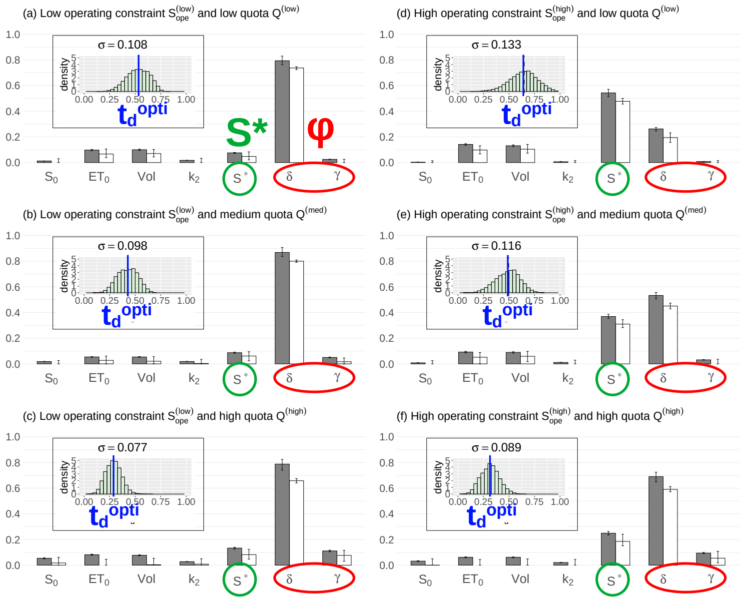
Calcul des indices de Sobol :

$$SI_i = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}_{X_{\sim i}}(Y|X_i))}{\mathrm{Var}(Y)}$$

$$TSI_i = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Var}_{X_i}(Y|X_{\sim i}))}{\mathrm{Var}(Y)}$$

(ici, X = paramètres explorés, $Y = t_d^{opti}$)

Résultats de sensibilité



Productions

III - Cadre opérationnel : Optirrig, cultures au champ

Objectif : Étendre les résultats “brique de base” à des situations + complexes

Hypothèses contextuelles :

- Présence de **pluies**
- Possibilité de **drainage**
- *(Débit d'irrigation contraint)*

Dynamique de l'humidité du sol :

$$\dot{S}(t) = \frac{ET0}{Vol}\Big(-\varphi(t)K_S(S(t)) - (1-\varphi(t))K_R(S(t)) + \frac{F_{max}}{ET0}u(t) - \frac{k_{sat}}{ET0}K_D(S(t)) + \frac{\alpha}{ET0}R(t) \Big)$$

a) Optirrig - Double modélisation CCI & Optirrig

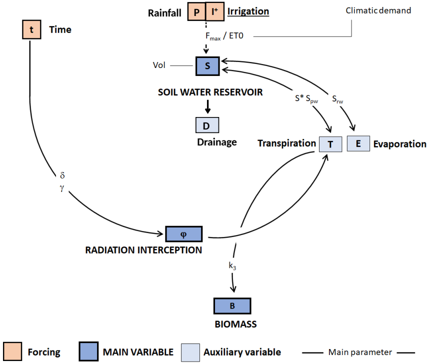


Schéma concept du modèle CCI

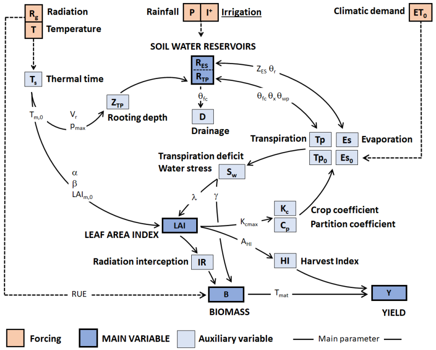


Schéma concept du modèle Optirrig

a) Optirrig - Correspondance CCI & Optirrig

	Terme	Modèle CCI		Modèle Optirrig
Directe	Temps (thermique)	$\boldsymbol{t}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{T}$
	Irrigation	$\boldsymbol{F_{max}u(t)}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{I_{max}I_{N,i}}$
	Drainage	$\boldsymbol{k_{sat}K_D}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{\min(Z_D(\theta-\theta_{fc}),K_D)}$
Indirecte	Transpiration	$\boldsymbol{\varphi}\cdot K_S ET0$	$\longleftrightarrow$	$K_c\cdot \boldsymbol{C_p}\cdot K_{TP}ET0$
	Évaporation	$\boldsymbol{(1-\varphi)}\cdot K_R ET0$	$\longleftrightarrow$	$K_c\cdot \boldsymbol{(1-C_p)}\cdot K_{ES}ET0$
	Prod. de biomasse	$k_3\cdot \boldsymbol{\varphi}\cdot \boldsymbol{K_S}$	$\longleftrightarrow$	$PAR\cdot RUE\cdot \boldsymbol{IR}\cdot \boldsymbol{S_w^\lambda}$
Limites	Réservoir accessible	$\boldsymbol{Vol}$	$\not\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{R_{ES},R_{TP}}$
	Recouvr. végétal	$\boldsymbol{\varphi}$	$\longleftrightarrow$	$\boldsymbol{LAI+IR+C_p}$

a) Optirrig - Correspondance CCI & Optirrig

Objectifs rendus possibles :

- Évaluer les stratégies théoriques dans Optirrig
  → implémenter les **TBIS**, tester dans différents contextes
- Reprendre l'étude analytique avec les enrichissements
  → remplacer Vol par $\boldsymbol{\rho z(t)}$, voir ce qui change
- Calibration, contextualisation, déclinaison de l'exploration numérique
  → sélectionner φ et préciser les sensibilités d'**ordre 2**

b) Pluies - Traiter les incertitudes liées aux pluies

(travaux en cours dans le cadre d'un projet en collaboration avec FEUP Porto)

Objectif : Étendre la méthodologie "brique de base"

→ $(R_1, ..., R_p)$ p séquences de pluies, $(\mu_1, ..., \mu_p)$ leurs probabilités d'occurrence

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{(t)} = \frac{ET0}{Vol}\Big(-\varphi(t)K_S(\boldsymbol{S_1(t)}) - (1-\varphi(t))K_R(\boldsymbol{S_1(t)}) - \frac{k_{sat}}{ET0}K_D(\boldsymbol{S_1(t)}) \\ \qquad + \frac{\alpha}{ET0}\boldsymbol{R_1(t)} + \frac{F_{max}}{ET0}{\color{red}\boldsymbol{u(t)}}\Big) \\ \dots \\ \dot{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{(t)} = \frac{ET0}{Vol}\Big(-\varphi(t)K_S(\boldsymbol{S_p(t)}) - (1-\varphi(t))K_R(\boldsymbol{S_p(t)}) - \frac{k_{sat}}{ET0}K_D(\boldsymbol{S_p(t)}) \\ \qquad + \frac{\alpha}{ET0}\boldsymbol{R_p(t)} + \frac{F_{max}}{ET0}{\color{red}\boldsymbol{u(t)}}\Big) \\ \dot{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{(t)} = k_3\varphi(t)K_S(\boldsymbol{S_1(t)}), \dots, \dot{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{(t)} = k_3\varphi(t)K_S(\boldsymbol{S_p(t)}), \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{(t)} = -F_{max}{\color{red}\boldsymbol{u(t)}} \end{cases}$$

Problème de contrôle à coût moyenné (Bettiol & Khalil, 2019) :

$$(\mathcal{OCP})_{AVG} : \quad \max_{u(\cdot)} \sum_{j=1}^{p} \mu_j B_j(T), \qquad {\color{red}\boldsymbol{V_j(T) \geq 0}}$$

b) Pluies - Remarques sur l'approche choisie

Prérequis important :

- Avoir une **représentation** des R_j (pour analytique et numérique)

Intérêts :

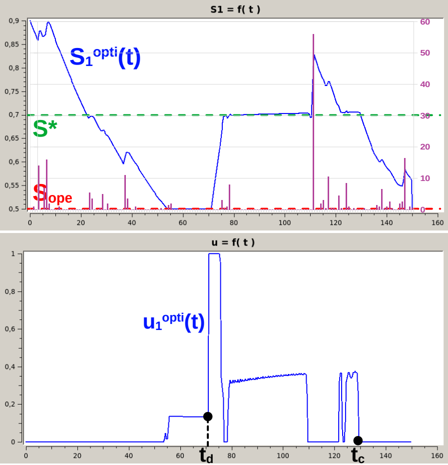
- Formulation **déterministe**
- Adaptée à une étude analytique (via **PMP moyenné**)
- Dérivation des **conditions nécessaires** découle de la "brique de base"

Inconvénients :

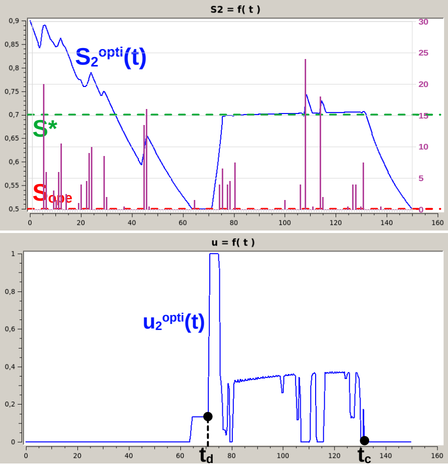
- Suppose de **connaître** les μ_j
- **Coûteux** en simulation numérique
- Stratégie optimale **fixée** ex ante, **indépendante** des observations

b) Pluies - Exemple illustratif

Cumul de pluies : $\int R_1 = 224mm$

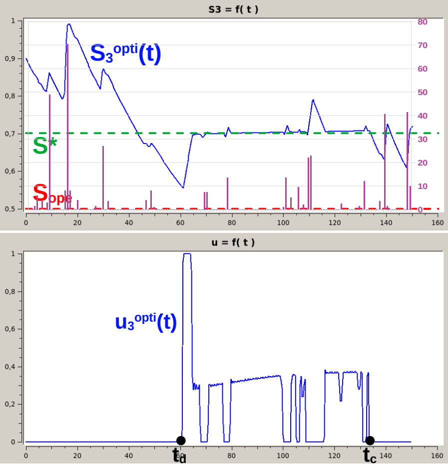


Cumul de pluies : $\int R_2 = 214mm$

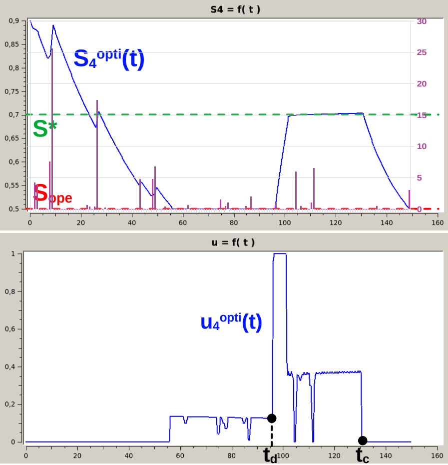


b) Pluies - Exemple illustratif

Cumul de pluies : $\int R_3 = 419mm$



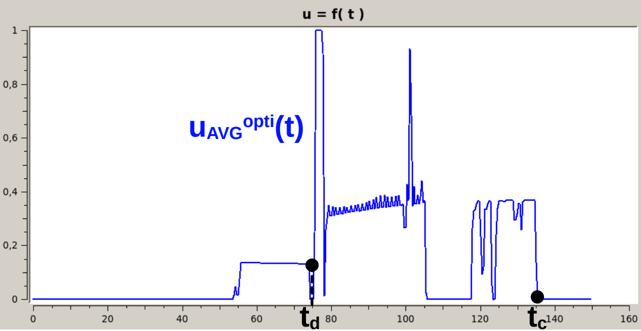
Cumul de pluies : $\int R_4 = 102mm$



b) Pluies - Exemple illustratif

→ Test des chroniques u_j^{opti} dans les scénarios $i \neq j$: **de 1% à 12%** de pertes de production de biomasse

→ Calcul de la chornique u_{AVG}^{opti}, optimale "en moyenne" : **1.5%** de pertes de production de biomasse "en moyenne"



Conclusions

Résumé des contributions :

- Extensions du principe bang-bang pour deux classes de dynamiques
- Obtention de stratégies optimales (TBIS)
- Couplage résultats théoriques et analyse de sensibilité
- Préparation du terrain pour les tests pratiques
- Cadre théorique pour la prise en compte des pluies

Projets en continuité :

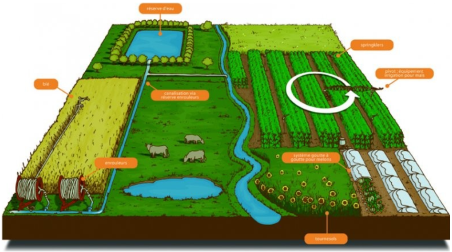
- Extension bang-bang **combinant** affine par morceaux et stochastique
- **Implémentation** des TBIS dans Optirrig, **évaluation** performances
- Développer une approche méthodologique **adaptative** avec pluies

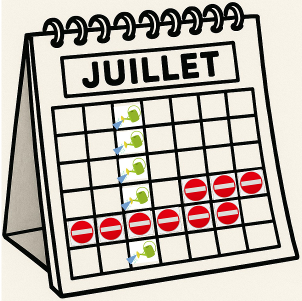
Perspectives :

- Considérer les nutriments : possibilité de **stress azoté**

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{(t)} = -k_{abs}\varphi(t)K_S(S(t))\boldsymbol{f}\left(\dfrac{\boldsymbol{N(t)}}{\boldsymbol{S(t)}}\right) + k_N F_{max} u(t) \\ \dot{B}(t) = k_3\varphi(t)K_S(S(t))\boldsymbol{f}\left(\dfrac{\boldsymbol{N(t)}}{\boldsymbol{S(t)}}\right) \end{cases}$$

- Étendre l'étude à l'échelle de l'**exploitation**/du **bassin**
- Contraintes opérationnelles : **tour d'eau**, arrêtés de **restriction**





R. Chenevat, B. Cheviron, S. Roux, A. Rapaport. About the Bang-Bang Principle for piecewise affine systems. *(CDC 2024)*, Milano, Italy, Dec 2024.

R. Chenevat, B. Cheviron, S. Roux, A. Rapaport. Extension of the bang-bang principle for piecewise affine dynamics under state constraints. *(soumis à Automatica, Nov 2024)*.

R. Chenevat, D. Goreac, Q. Li, A. Rapaport. About the Bang-Bang Principle for Controlled Affine Dynamics With Brownian Noise. *Journal of Convex Analysis*, 2025.

R. Chenevat, B. Cheviron, S. Roux, A. Rapaport. Optimal structures of crop irrigation strategies with state constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2025.

R. Chenevat, B. Cheviron, A. Rapaport, S. Roux. Exploring the optimality of Threshold-Based crop Irrigation feedback Strategies. *(en cours de re-soumission, 2025)*.